Brèves communications - Kurze Mitteilungen Brevi comunicazioni - Brief Reports

Les chaînes de Darboux et l'équation de Fourier

Dans une récente note[1] M. G. RIBAUD s'est attaché à l'étude de certaines solutions de l'équation classique de FOURIER

$$\text{(a)} \qquad a\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

Il a notamment montré que la solution de CAUCHY

$$\theta = f\left(\frac{x}{\sqrt{4\,a\,t}}\right) = f(z)$$

n'est qu'un cas particulier d'une solution plus générale qu'il écrit

$$\text{(b)} \qquad \theta = t^m f(z)$$

avec une fonction $f(z)$ définie par l'équation du second ordre

$$\text{(c)} \qquad f'' + 2zf' - 4mf = 0.$$

Nous pensons que la généralisation peut être poussée plus loin et l'égalité (c) de M. G. RIBAUD va nous permettre quelques remarques fort intéressantes.

Le changement de fonction

$$\text{(d)} \qquad \frac{f'}{f}\left(\frac{u_1'}{u_1} + z\right) - 4\,m = 0$$

permet d'écrire (c) sous la forme

$$\text{(e)} \qquad \frac{u_1''}{u_1} = z^2 - 1 + 4\,m.$$

Celle-ci nous conduit au théorème de DARBOUX[2] c'est-à-dire à la formation de chaînes d'équations. L'équation (e) étant prise comme premier chaînon, la solution particulière $u_1 = e^{z^2}/2$ obtenue lorsque l'on fait $m = 1/2$, fournit le second chaînon qui s'écrit

$$\text{(f)} \qquad \frac{u_2''}{u_2} = z^2 - 3 + 4\,m \quad \text{avec} \quad u_2 = u_1' - x\,u_1$$

et ainsi de suite pour tous les autres éléments de la chaîne de DARBOUX, avec pour le n-ième chaînon

$$\text{(g)} \qquad \frac{u_n''}{u_n} = z^2 - 2\,n + 1 + 4\,m;\quad u_n = u'_{n-1} - x\,u_{n-1}\,.$$

Nous voyons qu'il est remarquable d'avoir pu associer, au problème de la transmission de chaleur dans un mur indéfini homogène un problème d'enchaînement de DARBOUX, tel que toute équation-chaînon est intégrable lorsque les chaînons précédents ont été intégrés.

Signalons également la nature quantique des équations (e), (f), ..., (g); en effet, si m varie de façon continue, il n'en est pas de même des polynômes $(4m-1)$, $(4m-3)$ ..., $(4m-2n+1)$ qui ont des «valeurs particulières»: leur donner des valeurs continues seraient introduire de nouvelles équations qui n'auraient pas leur place dans la chaîne de DARBOUX.

[1] G. RIBAUD, C. R. Acad. Sci. Paris *226*, 140 (1948).

[2] G. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. 1 et 2, C. R. Acad. Sci. Paris *94*, (1882). – G. VIGUIER, C. R. Acad. Sci. Paris *227*, 504 (1948).

Nous reprenons maintenant l'équation (c) que nous écrivons

$$\text{(h)} \qquad u' + u^2 + 2z\,u - 4\,m = 0 \quad \text{avec} \quad u = \frac{f'}{f}.$$

C'est là une équation de RICCATI à laquelle nous pouvons associer le problème géométrique des développantes généralisées[1].

Etant donnée une courbe-base (M) et une courbe adjointe (L), sur la tangente en M nous portons la longueur $MN = u(z)$; les courbes (N) ainsi engendrées et admettant pour tangente NL sont dites «développantes généralisées de la courbe-base (M)»: elles sont déterminées par une équation de RICCATI en $u(z)$.

L'équation (h), associée à un tel problème, nous donne une famille de courbes-base à paramétrisation isométrique dont l'élément d'arc a la valeur $\sigma' = -4m$.

Si nous prenons pour (M) le cercle $\xi = 4m \cos z$, $\eta = 4m \sin z$, la courbe adjointe (L) est déterminée par la relation

$$\overline{ML}^2 = 1 + 4z^2$$

qui ne dépend pas du paramètre m.

Ainsi, nous avons pu associer à l'équation de FOURIER un problème d'enchaînement de DARBOUX et des notions métriques classiques liées à l'équation de RICCATI, ce qui, en fait, confirme l'extrême richesse de cette équation du second ordre (a).

G. VIGUIER

Paris, Institut Henri Poincaré, le 20 juin, 1949.

Zusammenfassung

Indem man eine von G. RIBAUD angegebene Lösung der FOURIERschen Gleichung verallgemeinert, gelangt man zum DARBOUXschen Theorem. Dieses führt zur Bildung von Gleichungsketten. Ebenso erkennt man die Möglichkeit, das geometrische Problem der verallgemeinerten Erzeugenden damit in Verbindung zu bringen.

[1] G. VIGUIER, Ann. Fac. Sci. Toulouse *59*, L. IX (1945).

Beitrag zum Zinsfußproblem der Prämie

Das von A. J. LOTKA[1] entwickelte Verfahren zur Berechnung der Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung kann verallgemeinert und dann zur Lösung des Zinsfußproblems der Prämie verwendet werden.

Wenn für die Zinsintensität δ_0 bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned} F(t) &= e^{-\delta_0 t}\, l_{x+t}\, \mu_{x+t}\,, \\ F_n &= e^{-\delta_0 n}\, l_{x+n}\,, \\ \Phi(t) &= e^{-\delta_0 t}\, l_{x+t}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

[1] Vgl. darüber z. B. A. LINDER, *Die Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung* (Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung *4*, 136 [1938], und A. H. POLLARD, J. Institute of Actuaries *74*, 288 (1948).